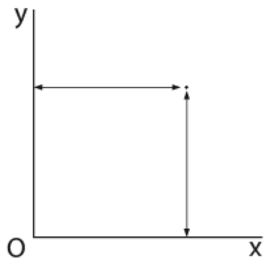
Kartesisches und Polarkoordinatensystem

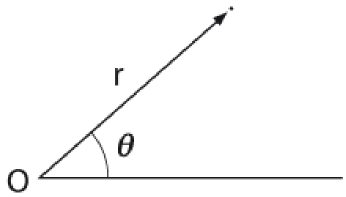
1. Grundlagen

Die Position eines Punktes auf einer Ebene kann auf zwei Arten festgestellt werden:

Im Kartesischen Koordinatensystem erzeugen die horizontale x-Achse (Abszisse) und die vertikale y-Achse (Ordinate) ein Bezugssystem. Ihr Schnittpunkt liegt im Ursprung 0.
Jeder Punkt wird durch seine Koordinaten (x | y) bestimmt.

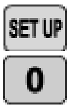


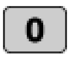
Auch im Polarkoordinatensystem bestimmen zwei Koordinaten die Position eines Punktes. Allerdings gibt nur eine Koordinate eine Länge an. Die untere horizontale Linie hilft bei der Messung der zweiten Koordinate.
Man kann sich im Polarkoordinatensystem einen Kreis vorstellen, der den Mittelpunkt in 0 mit dem Radius r hat. Der erste Wert im Polarkoordinatensystem ist die Länge des „Radius“ r.
Der zweite Wert θ wird durch den Winkel zwischen der Abszisse und r im mathematisch positiven Drehsinn (entgegen dem Uhrzeigersinn) bestimmt.
Jeder Punkt wird durch seine Koordinaten (r | θ) bestimmt.

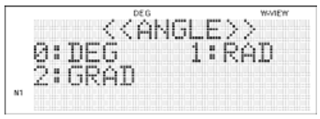


Taschenrechner-Eingabe

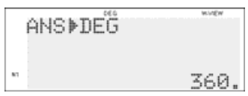
Für Polarkoordinaten muss ein Winkel berechnet werden. Deshalb muss der Taschenrechner in den Winkelmodus eingestellt werden.



Nun kann die gewünschte Winkelart eingestellt werden, z.B.:  für DEG (= Standard °)



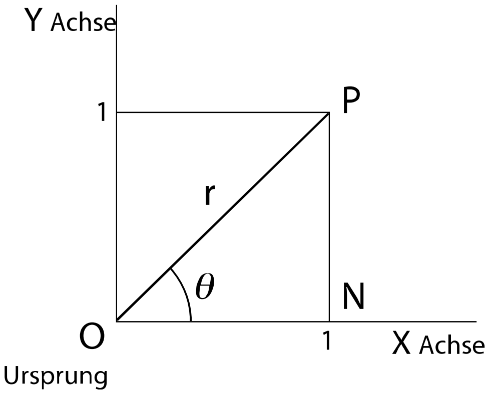
Mit  wird der eingegebene Wert für den Winkel umgerechnet:
360° im Kreis
400 Neugrad im Kreis
2 Π Radius im Kreis



Die Taste  wird zur Eingabe und Umrechnung der Koordinaten benutzt (für Polare- und Kartesische).

2. Der Zusammenhang zwischen kartesischen und Polarkoordinaten

Ein Punkt P kann also durch kartesische und durch Polarkoordinaten auf einer Ebene definiert werden. Diese Koordinaten stehen in einem Zusammenhang. Sieh Dir das Diagramm an und versuche mithilfe einfacher Trigonometrie, die Polarkoordinaten für P zu errechnen:



→ P (? | ?)

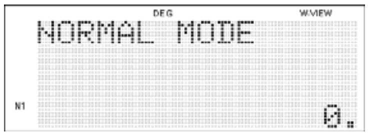
Die kartesischen Koordinaten des Punktes P sind hier (1|1), die Polarkoordinaten (r | θ).

Nach dem Satz des Pythagoras :
r wird wie die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks berechnet:
$r^2 = \overline{PN}^2 + \overline{ON}^2 = 1^2 + 1^2 = 2$, so dass
$r = \sqrt{2} \approx 1{,}414..$

Mit Trigonometrie **:**
θ wird über den Tangens (Gegenkathete [$\overline{PN}$] zu Ankathete [$\overline{0N}$]) berechnet:
$\tan\theta = \frac{\overline{PN}}{\overline{ON}} = \frac{1}{1} = 1$, so dass $\theta = 45°$

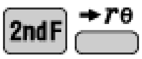
Anwendung des Taschenrechners

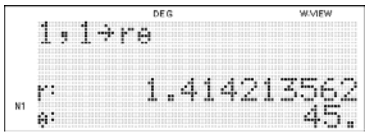
Jetzt weißt Du, wie Du kartesische Koordinaten in Polarkoordinaten umrechnen kannst. Der EL-W531 kann automatisch kartesische zu Polarkoordinaten umrechnen.
Stelle den Winkel-Modus ein (wie oben beschrieben).



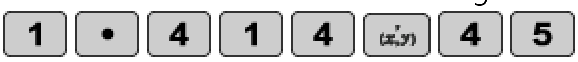
Die kartesischen Koordinaten für den Punkt P (1|1) , x eingeben:

Umrechnen in die Polarkoordinaten:

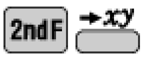
Finde die Werte für r und θ: 

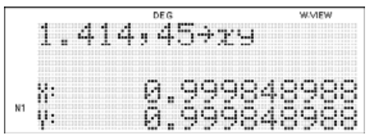


Umgekehrt funktioniert es genauso:
Werte für die Polarkoordinaten eingeben:



Umrechnen in kartesische Koordinaten:

Finde die Werte für x und y: 



Die aktuellen Werte für r oder x speichert der Taschenrechner im Speicher **X**, die Werte für θ oder y in Speicher **Y**.

3. Übungen

Rechne folgende kartesische Koordinaten ohne Taschenrechner-Hilfe um. Überprüfe dann Deine Ergebnisse mit dem EL-W531.

Q= (4|3)
r : ____
θ : ____
Polarkoordinatensystem → Q = (|)
R = (12|4)
r : ____
θ : ____
Polarkoordinatensystem → R = (|)
S = (8|16)
r : ____
θ : ____
Polarkoordinatensystem → S = (|)

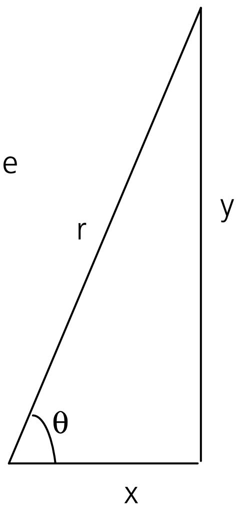
Rechne mit Hilfe des Taschenrechners folgende Polarkoordinaten um:
T = (10|30)
Kartesisches Koordinatensystem → T = (|)
U = (10|53,13)
Kartesisches Koordinatensystem → U = (|)
V = (3√13|25)
Kartesisches Koordinatensystem → V = (|)

4. Zusatz-Übung

Benutze die Koordinatenfunktion des EL-W531, um den Satz des Pythagoras zu untersuchen.
Die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks haben die Werte 12 und 5. Berechne mit der Koordinatenfunktion des Taschenrechners die Länge r. Überprüfe deine Antwort, indem du den Satz des Pythagoras anwendest!

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Gib die **x** und **y** als kartesische Koordinaten ein und rechne dann in die Polarkoordinaten um, wobei **r** die Hypotenuse ist.



Lösungen

3. Übungen

Q= (4|3)
r : $r^2 = x^2 + y^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$ → $r = \sqrt{25} = 5$
θ : $\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{3}{4}$ → $\theta \approx 36{,}86°$
Polarkoordinatensystem → Q = (5|36,86)
R = (12|4)
r : $r^2 = x^2 + y^2 = 12^2 + 4^2 = 144 + 16 = 160$ → $r = \sqrt{160} = 4\sqrt{10} \approx 12{,}65$
θ : $\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ → $\theta \approx 18{,}43°$
Polarkoordinatensystem → R = (12,65|18,43)
S = (8|16)
r : $r^2 = x^2 + y^2 = 8^2 + 16^2 = 64 + 256 = 320$ → $r = \sqrt{320} = 8\sqrt{5} \approx 17{,}89$
θ : $\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{16}{8} = 2$ → $\theta \approx 63{,}43°$
Polarkoordinatensystem → S = (17,89|63,43)

T = (10|30)
Kartesisches Koordinatensystem → T = (8,66|5)
U = (10|53,13)
Kartesisches Koordinatensystem → U = (6|8)
V = (3√13|25)
Kartesisches Koordinatensystem → V = (9,8|4,57)

4. Zusatz-Übung
Um mit der Koordinatenfunktion des Taschenrechners auf die Länge r zu kommen, wird x und y je ein Längenwert der Katheten zugeschrieben. Je nachdem, welcher Achse wir welchen Wert zuschreiben, verändert sich natürlich der Winkel θ, die Länge r allerdings bleibt gleich. Da der Winkel in diesem Fall keine Rolle spielt (wir wollen ja nur r untersuchen), ist es egal, welchen Wert wir der y- und welchen der x-Achse zuschreiben. Um die Länge r zu erhalten, müssen wir die x- und y-Werte zu Polarkoordinaten umwandeln.

Der Taschenrechner gibt folgende Werte:
Geben wir die Koordinaten (12|5) ein und wandeln sie in Polarkoordinaten um, erhalten wir das Ergebnis (13|22,62). r ist also = 13!
(Geben wir die Koordinaten (5|12) ein, erhalten wir das Ergebnis (13|67,38).)

Wir überprüfen mit dem Satz des Pythagoras: $r^2 = 12^2 + 5^2 = 169$, r ist somit $\sqrt{169}$ = 13.